



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

UTILIZAÇÃO DE BOBINAS PARA O CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Samuel de Oliveira Trindade (Universidade Ibirapuera, Bolsista
PIBIC/CNPq)
E-mail: s.tryndade@gmail.com

Dr. Ijar M. da Fonseca (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: ijar@dem.inpe.br

Prof. Walter Matheos Jr
Universidade Ibirapuera (Informática, Co-orientador)

Junho de 2005

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	2
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	3
1.1. Histórico	4
CAPÍTULO 2 – VETORES	5
2.1 Introdução.....	5
2.2 Notação.....	6
2.3 Igualdade e oposição	6
2.4 Multiplicação por um escalar	7
2.5 Soma e subtração de vetores.....	7
2.6 Coordenadas de um vetor	9
2.7 Produto escalar	10
2.8 Produto vetorial	11
CAPÍTULO 3 – ELETROMAGNETISMO - CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	11
3.1. A Lei de Coulomb	12
3.2 Carga elementar.....	12
3.3 Campo elétrico.....	13
3.4 Determinação do campo elétrico	13
3.5 Exemplos de linhas de força.....	14
3.6 Intensidade de Campo Elétrico.....	15
3.7 Densidade de Fluxo Elétrico.....	15
3.8 Energia e Potencial de uma Carga Pontual em Movimento num Campo Elétrico.....	16
3.9 Diferença de Potencial.....	16
3.10 Interação magnética e campo magnético.....	17
3.11 Campo magnético produzido por uma corrente elétrica.....	19
3.12 Campo magnético terrestre.....	20
CAPÍTULO 4 – MECÂNICA – CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	20
4.1 Corpo Rígido	20
4.2 Momento linear	21
4.3 Momento angular.....	21
4.4 Velocidade angular	22
4.5 Momento de inércia.....	23
4.5 Movimento de um sólido.....	24
4.6 Forças em corpos rígidos – Torque	25
4.6 Rotação do corpo rígido	27
CAPÍTULO 5 – BOBINAS MAGNÉTICAS.....	28
5.1 Solenóides.....	28
5.2 Calculo do torque da bobina.....	29
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	30

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Grandezas escalares e vetórias

Figura 2	Igualdade e oposição de vetores
Figura 3	Multiplicação de vetores por um escalar
Figura 4	Soma de vetores
Figura 5	Subtração de vetores
Figura 6	Regra do Paralelogramo para adição de vetores
Figura 7	Soma de vetores utilizando trigonometria
Figura 8	Subtração de vetores utilizando trigonometria
Figura 9	Componentes de um vetor com duas dimensões
Figura 10	Componentes de um vetor com três dimensões
Figura 11	Produto escalar de vetores utilizando trigonometria
Figura 12	Produto vetorial utilizando regra da mão direita
Figura 13	Força entre duas cargas puntiformes
Figura 14	Intensidade do campo elétrico
Figura 15	Linhas de força de uma carga puntiforme negativa
Figura 16	Campo de força uniforme
Figura 17	Linhas de força para duas cargas
Figura 18	A diferença de potencial elétrico entre dois pontos A e B situados em um campo elétrico uniforme
Figura 19	Fluxo magnético
Figura 20	Indução magnética
Figura 21	Campo magnético produzido por uma corrente elétrica em condutor retilíneo de seção circular uniforme
Figura 22	Campo magnético produzido por uma corrente elétrica em condutor não uniforme
Figura 23	Movimento de Rotação e translação
Figura 24	Momento angular
Figura 25	Velocidade Angular
Figura 26	Momento de inércia
Figura 27	Movimento de um sólido
Figura 28	Força em um corpo rígido
Figura 29	Força em um corpo rígido provocando um movimento de rotação
Figura 30	Torque provocado por um força F em um corpo rígido
Figura 31	Componentes do vetor torque
Figura 32	Torque provocado por duas forças F em um corpo rígido
Figura 33	Rotação de um corpo
Figura 34	Linhas de indução em um solenóide
Figura 35	Corte longitudinal de um solenóide
Figura 36	Vista superior de satélite com bobinas
Figura 37	Vista Lateral de satélite com bobinas

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta o resultado do projeto PIBIC iniciado em setembro de 2005. A proposta é o estudo de bobinas magnéticas para o controle de atitude de satélites artificiais, fundamental para a realização dos objetivos de missões espaciais. O sistema controle de atitude (SCA) deve satisfazer os requisitos de apontamento impostos pelas missões. O projeto de um SCA pode requerer dentre outras coisas atuadores e sensores. Os sensores são utilizados para fornecer informações de posição e

velocidade do satélite para o controle. Os atuadores atuam no satélite para fazer manobras e/ou fazer pequenas correções visando manter a atitude do satélite de acordo com as especificações nominais. Atuadores podem ser jatos de gás, rodas de reação, bobinas magnéticas (bobinas de torque), dentre outros.

Neste trabalho o principal objetivo é o estudo das aplicações de bobinas magnéticas para o controle de atitude de satélites artificiais. As aplicações de bobinas para o controle de atitude de satélites artificiais se fundamentam na interação de bobinas magnéticas com o campo magnético terrestre para a geração de torque.

O princípio é a interação do momento magnético das bobinas com o campo magnético da terra para a geração de torques visando manobrar o satélite ou fazer pequenas correções na sua atitude para mantê-la de acordo com a atitude nominal especificada.

Nesta primeira fase do projeto está sendo feito um estudo dos princípios fundamentais do eletromagnetismo tendo em vista o projeto de bobinas magnéticas que possam ser utilizadas em conjunção com o campo magnético da terra para o controle de atitude de satélites artificiais. Neste sentido o estudo apresenta os conceitos de campo magnético, momento magnético de bobinas, força magnética, fluxo magnético e torque. O trabalho se estenderá futuramente ao projeto de bobinas magnéticas para um nível de torque especificado, que, por interação com o campo magnético, possa ser utilizada para controlar satélites.

O trabalho tem como objetivos o estudo dos fundamentos do eletromagnetismo para a geração de torque a partir de bobinas magnéticas, o estabelecimento de um roteiro para o cálculo e projeto de desenvolvimento de bobinas para uso em satélites, um estudo de caso de aplicação de bobinas para o controle de atitude do SCD-2.

1.1. Histórico

A idéia de se utilizar bobinas magnéticas para o controle de satélites artificiais surgiu nos primórdios da era espacial. Os primeiros satélites não dispunham de controle ativo e portanto não faziam uso de sensores e atuadores para controle de atitude. Entretanto, tão logo os satélites evoluíram para o uso de controle ativo as bobinas magnéticas passaram a constar na lista de atuadores para controle de atitude. O primeiro satélite, que inaugurou a era espacial, foi o Sputnik, da antiga União Soviética. Foi lançado em 1957 e não possui controle ativo de atitude. Em 1958 os Estados Unidos lançaram o Explorer 1, também sem controle ativo. Já em 1960 Harold Perkel [1] concebeu um sistema de controle de atitude de satélites em três eixos que incluía uma

roda de quantidade de movimento (momentum wheel) e tres bobinas de torque. Portanto o uso deste tipo de atuador para satélites artificiais data do início da era espacial. Perkel propôs o uso da interação das bobinas magnéticas com o campo magnético terrestre para a geração dos torques necessários para o controle de atitude dos eixos de guinada e rolamento. Desde então vários outros satélites utilizaram o principio de interação das bobinas com o campo magnético da terra para sistemas de controle de atitude. Em particular, os satélites de coleta de dados do Brasil, o SCD-1 e SCD-2 utilizam bobinas como atuadores em seu sistema de controle de atitude (embora o SCD-1 seja controlado passivamente por rotação, seu sistema de controle contém uma bobina, que é utilizada para manobrar o satélite e evitar que uma das faces do mesmo seja iluminada pelo sol). As bobinas do satélite de coleta de dado SCD-2 [2], são comandadas por uma eletrônica de bordo para selecionar o chaveamento correto da bobina, de forma a aumentar ou reduzir a velocidade angular do satélite. Embora as missões de satélites científicos SACI-1 e SACI-2 tenham falhado, os sistemas de controle dos referidos satélites contemplavam o uso de bobinas magnéticas para fins de manobras de grandes ângulos e para controle de atitude. O SACI-1 utilizaria bobinas para manter os painéis solares do veículo apontados para o sol. O SACI-2 utilizaria bobinas para amortecer seu movimento rotacional imediatamente após sua injeção em órbita, para fazer a aquisição da atitude nominal e para fazer correções em atitude. Uma falha no sistema de comunicação levou à perda da missão SACI-1 enquanto que uma falha de ignição no veículo lançador de satélites do Brasil (VLS) levou a sua destruição e com ele, o SACI-2. As bobinas utilizados nos satélites das series SCDs e SACIs são todas bobinas com núcleo de ar, ou seja, as bobinas não contém núcleo ferro-magnético.

O projeto de bobinas de torque para o controle de atitude de satélites artificiais requer o conhecimento e a compreensão de alguns conceitos básicos de elétrica, magnetismo, vetores e mecânica, especificamente a mecânica espacial que trata da dinâmica de atitude de satélites. Nos próximos capítulos serão apresentados conceitos fundamentais para a compreensão dos princípios de funcionamento de bobinas de torque para operar em conjunção com o campo magnético da terra.

CAPÍTULO 2 – VETORES

2.1 Introdução

Conceitos matemáticos são muitas vezes ligados a fenômenos físicos, para adequada representação dos mesmos. Grandezas como temperatura, potência e outras são completamente definidas por um único valor numérico, é uma quantidade física caracterizada por intensidade.

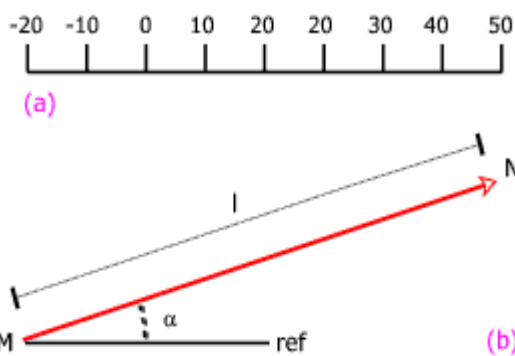


Figura 1
conforme (b) da figura.

Tais grandezas são denominadas escalares porque, na forma gráfica, podem ser visualizadas como um ponto em uma escala conforme Figura (a).

Outras, como velocidade, força, etc, precisam, além do valor escalar, de uma direção e um sentido e graficamente são representadas por um segmento de reta com seta. São chamadas grandezas vetoriais.

Portanto, um vetor define corretamente a grandeza através do seu comprimento e do ângulo que faz com uma referência,

2.2 Notação

Vetores são simbolizados por um caractere alfabético, maiúsculo ou minúsculo, em **negrito**, exemplos: vetor **a**, vetor **B**, vetor **v**, etc.

O comprimento do vetor é também chamado **valor absoluto** ou **módulo** do mesmo e simbolizado pelo caractere sem negrito. Assim, para o vetor **v**, $v = | \mathbf{v} |$.

Algumas vezes, os vetores são designados por letras ou números nas suas extremidades. Exemplo: **MN** da figura 1. O ponto M é a **origem** do vetor.

2.3 Igualdade e oposição

Dois ou mais vetores são iguais se têm idênticos módulos e sentidos. Assim, eles estarão em segmentos de reta paralelos, podendo ser coincidentes ou não.

Dois vetores são opostos se têm o mesmo módulo e sentidos opostos. De forma similar, estarão em segmentos de retas paralelos, coincidentes ou não. A oposição é marcada por sinal negativo, $c = - d$.

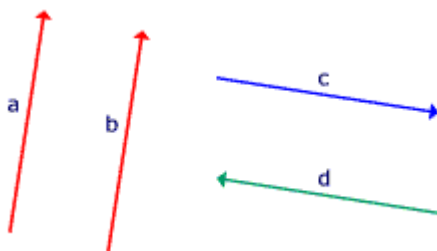


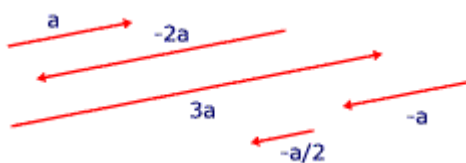
Figura 2

Notar que esses conceitos de igualdade e oposição de vetores podem não ser suficientes para definir certos fenômenos físicos. Às vezes, é necessária a indicação dos pontos de origem. Exemplo: suponha que **c** e **d** são forças atuantes em um mesmo corpo. Se estiverem no mesmo alinhamento, nenhuma efeito é observado. Se estiverem deslocados conforme figura, há um esforço de rotação (momento)

sobre o corpo, tanto maior quanto maior a distância entre eles. Se vetores têm o mesmo comprimento, os módulos são idênticos, independente da direção. Assim, na Figura acima: $| a | = | b | = | c | = | d |$.

A diferença de direção é condição suficiente para a desigualdade, independente do módulo. Portanto $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ apesar de $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.

2.4 Multiplicação por um escalar



A multiplicação ou divisão por um escalar resulta em vetores de segmentos de reta paralelos, na mesma linha ou não, com módulos e sentidos alterados pelo multiplicador ou divisor.

Figura 3

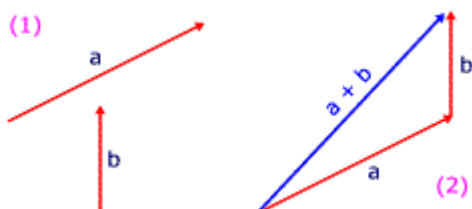
lado.

Exemplos de multiplicação e divisão por alguns fatores são dados na Figura ao

Vetor unitário é um vetor de módulo igual a uma unidade de referência no sistema em que se trabalha. Se \mathbf{u} é um vetor unitário, então um vetor genérico \mathbf{a} na mesma direção é dado por $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{u} = a \mathbf{u}$.

2.5 Soma e subtração de vetores

Para somarmos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} conforme Figura abaixo, devemos coincidir a origem de um com o final do outro. A origem e o final restante será o vetor representativo da **soma vetorial** dos mesmos, representado pelo vetor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.



O módulo da soma não é necessariamente igual à soma dos módulos.

Se $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, \mathbf{a} e \mathbf{b} têm a mesma direção.

Figura 04

Para a subtração, considere na Figura abaixo os mesmos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} da figura anterior. Agora faz-se a coincidência das origens e as outras extremidades restantes (finais) formam o vetor da diferença.



Alternativamente, pode ser como em (2) da figura: faz-se a soma

$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

De forma similar à adição, o módulo da diferença não é necessariamente igual à diferença dos módulos.

Figura 05

Se $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$, \mathbf{a} e \mathbf{b} têm a mesma direção

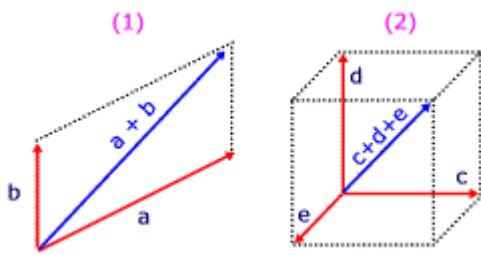


Figura 06

2 da mesma figura.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} \\
 (m + n) \mathbf{a} &= m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \\
 m(n\mathbf{a}) &= (mn)\mathbf{a} \\
 \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \\
 m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= m\mathbf{a} + m\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

Um outro método para a determinação gráfica da soma é a **regra do paralelogramo**, indicada em 1 na Figura 06.

Juntam-se as origens e a diagonal do paralelogramo formado é a soma.

Para vetores no espaço, pode ser usada a similar **regra do paralelepípedo**, conforme

A tabela ao lado dá algumas **propriedades da soma e da multiplicação por escalar**.

Na Figura 07 temos a representação gráfica da soma simples $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Por trigonometria temos $OC^2 = OB^2 + BC^2$. E podemos também verificar:

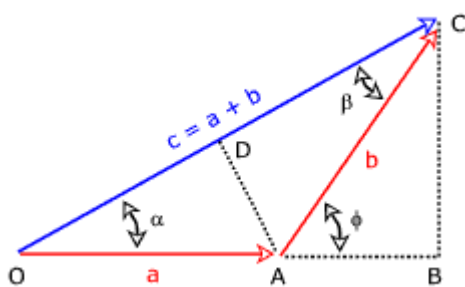


Figura 07

é o produto escalar dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Portanto, em módulo, a soma é dada por: $c^2 = a^2 + b^2 + 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

$$OC = c.$$

$$OB = OA + AB = a + b \cos \varphi.$$

$$BC = b \sin \varphi.$$

Substituindo:

$$c^2 = a^2 + 2 a b \cos \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

Simplificando:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 a b \cos \varphi. \text{ Mas } (a b \cos \varphi)$$

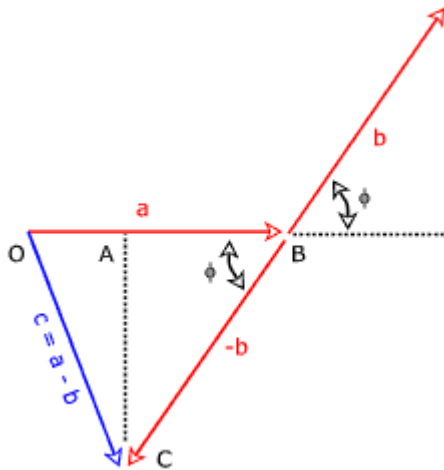


Figura 08

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

O caso de $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ equivale a $\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

$$\text{Temos } OC^2 = OA^2 + AC^2.$$

$$OC = c.$$

$$OA = a - b \cos \varphi.$$

$$AC = b \sin \varphi.$$

$$c^2 = (a - b \cos \varphi)^2 + b^2 \sin^2 \varphi = a^2 + b^2 \cos^2 \varphi - 2 a b \cos \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \varphi, \text{ porque } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

De forma similar ao caso anterior: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \varphi$

2.6 Coordenadas de um vetor

Considerando as regras da soma vetorial, se a origem de um sistema de coordenadas xy coincide com a origem do vetor, pode-se verificar que este vetor é igual à soma dos vetores formados por suas projeções em cada eixo.

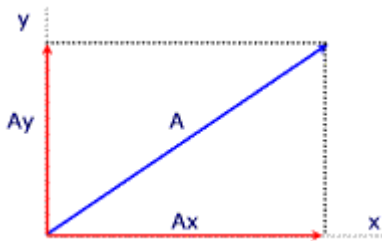


Figura 09

Assim, na Figura 07 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$.

Ou seja, os vetores \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y são os **componentes** do vetor no sistema de coordenadas.

E os escalares A_x e A_y são as **coordenadas** do vetor no sistema.

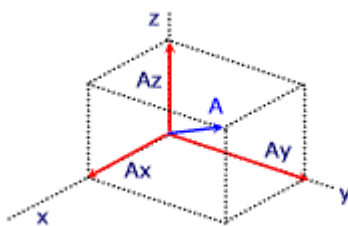


Figura 10

Para um vetor no espaço conforme Figura 08, pode-se escrever de forma similar

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

Para simplificar a notação, muitas vezes é usada a forma $\mathbf{a}\{X_a, Y_a, Z_a\}$. Exemplos $\mathbf{a}\{2,3,0\}$, $\mathbf{b}\{-1,12,8\}$, etc.

E o **módulo** do vetor pode ser dado por suas coordenadas: $|\mathbf{a}| = (X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2)^{1/2}$.

Vetores paralelos: Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são paralelos, as suas coordenadas são proporcionais

$$X_b/X_a = Y_b/Y_a = Z_b/Z_a = c.$$

Se o coeficiente de proporcionalidade c é positivo, eles têm a mesma direção. Se negativo, eles são opostos (obs: se um dos coeficientes de \mathbf{a} é nulo, fica subentendido que o correspondente de \mathbf{b} também é nulo).

Soma de vetores: se vetores são somados, o resultado tem as somas das coordenadas.

Exemplo: seja $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

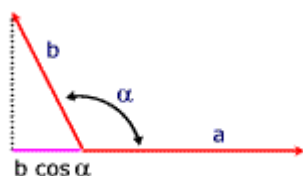
Então, $X_c = X_a + X_b$, $Y_c = Y_a + Y_b$ e $Z_c = Z_a + Z_b$.

Multiplicação ou divisão por um escalar: as coordenadas do resultado é obtida pela multiplicação ou divisão pelo escalar.

Exemplo: seja $\mathbf{c} = m\mathbf{a}$. Então, $X_c = mX_a$, $Y_c = mY_a$ e $Z_c = mZ_a$.

2.7 Produto escalar

O **produto escalar** de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é definido como o produto dos seus módulos multiplicado pelo co-seno do ângulo entre eles (notação $\mathbf{a}\mathbf{b}$ ou $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$).



Conforme Figura 09, $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$.

Notar que é a projeção de \mathbf{b} sobre \mathbf{a} , multiplicada pelo módulo de \mathbf{a} ou vice-versa.

Figura 11

Se dois vetores fazem um ângulo reto entre si, o produto escalar dos mesmos é nulo.

$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$
$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}$
$(m\mathbf{a})\mathbf{b} = m(\mathbf{a}\mathbf{b})$
$(m\mathbf{a})(n\mathbf{b}) = (mn)\mathbf{a}\mathbf{b}$

A tabela ao lado dá algumas **propriedades do produto escalar**.

No caso particular $\mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, o produto é chamado **quadrado escalar** do vetor \mathbf{a} .

Para se obter o produto escalar em termos de coordenadas de dois vetores multiplicamos suas componentes e para isso utilizaremos o seguinte exemplo:

sejam os vetores $\mathbf{a} \{X_a, Y_a, Z_a\}$ e $\mathbf{b} \{X_b, Y_b, Z_b\}$. O produto escalar é dado por:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b.$$

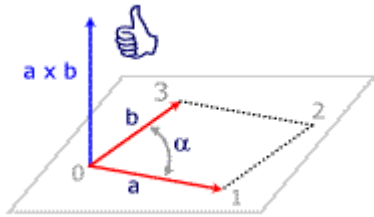
E para se obter o ângulo entre dois vetores utiliza-se o produto dividido pela multiplicação de seus módulos.

$$\cos \alpha = \mathbf{a}\mathbf{b} / (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|) = X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b / [(X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2)^{1/2} \cdot (X_b^2 + Y_b^2 + Z_b^2)^{1/2}].$$

Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são perpendiculares, se $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$.

2.8 Produto vetorial

Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores no mesmo plano. O produto vetorial dos mesmos, indicado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, é um vetor tal que:



Seu módulo é igual à área do paralelogramo 0123, isto é, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$.

A direção é perpendicular ao plano do paralelogramo.

O sentido é dado pela **regra da mão direita**, considerando que \mathbf{a} é o

Figura 12

multiplicando e \mathbf{b} , o multiplicador.

A expressão **produto vetorial** indica que é realmente um vetor, ao contrário do produto escalar.

Como o sentido é dado pela regra da mão direita, fica evidente que a ordem dos fatores não é indiferente. Assim, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, ou seja, não há propriedade comutativa.

$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
$(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
$(m\mathbf{a}) \times (n\mathbf{b}) = mn(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

A tabela ao lado dá **algumas propriedades do produto vetorial**.

O produto vetorial em função das coordenadas pode ser representado de duas formas:

Sejam $\mathbf{a} \{X_a, Y_a, Z_a\}$ e $\mathbf{b} \{X_b, Y_b, Z_b\}$ então, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, logo $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} Y_a Z_b - Z_a Y_b \\ Z_a X_b - X_a Z_b \\ X_a Y_b - Y_a X_b \end{pmatrix}$

A representação anterior pode ser dada com apenas um determinante. Veja abaixo.

Sejam $\mathbf{a} \{X_a, Y_a, Z_a\}$ e $\mathbf{b} \{X_b, Y_b, Z_b\}$ então, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix}$

Onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários conforme coordenadas de um vetor.

CAPÍTULO 3 – ELETROMAGNETISMO - CONCEITOS FUNDAMENTAIS

3.1. A Lei de Coulomb

A eletricidade estática já era conhecida dos gregos na antiguidade e foram eles os primeiros a utilizar a terminologia eletricidade. Perceberam que ao esfregar pequenos pedaços de âmbar nas próprias roupas o mesmo adquiria a propriedade de atrair fragmentos de penugem. Entretanto a eletricidade estática foi considerada por séculos como magia, denominada força vital. Foi em 1600 que Dr. Gilbert, físico da Rainha da Inglaterra estabeleceu que o vidro, enxofre, âmbar e outros materiais atraíam para si muitos outros materiais. Um pouco mais tarde Charles Coulomb (França) elaborou vários experimentos usando uma balança de torção sensível (inventada por ele) para determinar quantitativamente a força exercida entre dois objetos com cargas elétricas estáticas. Coulomb estabeleceu que a força entre dois objetos bem pequenos separados a grandes distâncias comparadas as suas dimensões (dos objetos) é proporcional à carga em cada um deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os objetos.

Note a semelhança com a lei da gravitação de Newton. A diferença é que, nesta última, ocorre apenas atração. $F = k \frac{q_1 * q_2}{r^2}$

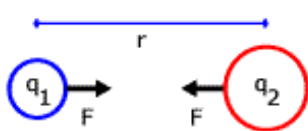


Figura 13

Onde:

q_1 e q_2 são cargas, positivas ou negativas.

r refere-se à distância entre os dois objetos em metros

k é uma constante de proporcionalidade dada por

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Portanto a Lei de Coulomb pode ser escrita como $F = \frac{q_1 * q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

na qual ϵ_0 é a permissividade do espaço livre entre os dois objetos. A magnitude de ϵ_0

$$\epsilon_0 \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$$

Este valor dado para ϵ_0 é válido para o vácuo e diferente para outros meios.

A unidade da carga elétrica é o **Coulomb** (símbolo C), definida no Sistema Internacional como: Carga elétrica que passa, durante um segundo, pela seção transversal de um condutor percorrido por uma corrente invariável e igual a um ampère.

3.2 Carga elementar

A carga elétrica não varia de forma contínua e obedece aos princípios da física quântica. A menor carga elétrica possível é a do elétron e $\cong 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ que é chamada de carga elétrica elementar.

Portanto, uma carga qualquer q deve ser tal que $q = n e$ onde n é um número inteiro, positivo ou negativo.

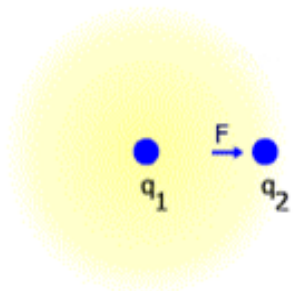
É evidente que, com um valor tão pequeno, para fins práticos, é como se fosse continuamente variável. Entretanto, certos fenômenos só podem ser estudados com o uso do conceito quântico.

3.3 Campo elétrico

Um corpo de massa m , próximo da Terra, é submetido a uma aceleração g tal que a força atuante (peso P) é

$$P = m g. \text{ De outra forma, pode-se escrever: } g = P / m.$$

E a aceleração da gravidade g poderia ser considerada como um vetor representativo do **campo gravitacional** da Terra.



De forma análoga à gravidade, podemos considerar, conforme Figura ao lado, um vetor E que represente a **intensidade do campo elétrico** da carga q_1 na carga q_2 .

$$\text{Assim, } E = F / q_2.$$

Como F é uma grandeza vetorial e q_2 um escalar, E também é um vetor.

Figura 14

A unidade de E no Sistema Internacional é N/C (**newton por coulomb**), de forma análoga à do campo gravitacional N/kg (ou m/s^2).

O conceito de campo é necessário principalmente para o estudo de cargas não estacionárias, mas o seu desenvolvimento implica alguma complexidade.

3.4 Determinação do campo elétrico

Anteriormente foi dada a introdução ao assunto, com a definição da grandeza vetorial que representa o campo. O cálculo do seu valor irá depender da forma geométrica e da distribuição das cargas envolvidas. Por exemplo, sejam duas cargas puntiformes: q_0 a de referência, isto é, a que se considera como produtora do campo e q uma carga situada a uma distância r de q_0 .

Conforme lei de Coulomb a força em q é dada por: $F = (1/(4 \pi \epsilon_0)) \cdot (q_0 q / r^2)$ e, desde que $E = F / q$, temos: $E = (1/(4 \pi \epsilon_0)) \cdot (q_0 / r^2)$

E a direção do vetor E será radial, divergente ou convergente de q_0 , dependendo desta ser positiva ou negativa.

Se o campo E é produzido por mais de uma carga puntiforme, procede-se à soma vetorial, de forma similar às forças na página anterior:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

No caso de distribuição contínua de cargas deverá haver uma integração:

$$E = \int dE, \text{ onde } dE = (1/(4 \pi \epsilon_0)) \cdot (dq / r^2)$$

Pode-se concluir que a complexidade aumenta bastante na prática, pois em muitos casos a distribuição é contínua. E o conceito de campo elétrico até aqui informado é de pouca utilização prática devido às suas dificuldades de determinação. Para facilitar, usa-se o conceito de **linhas de força** e medidas indiretas a partir do potencial elétrico.

3.5 Exemplos de linhas de força

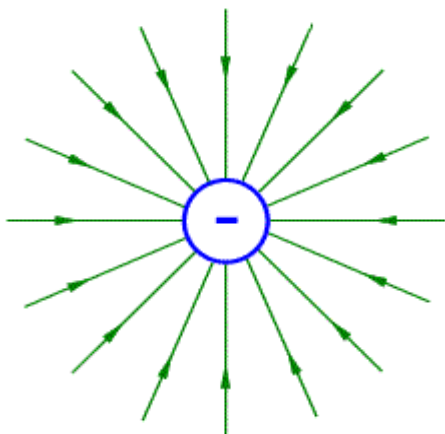


Figura 15

campo diminui com a distância.

A Figura ao lado é um exemplo de linhas de força representativas do campo de uma carga puntiforme negativa.

A simetria do caso sugere que são retas no sentido radial e, portanto, as tangentes são as próprias, coincidindo com a atuação do campo.

Se a carga fosse positiva, apenas o sentido das linhas (indicado pelas setas) seria o contrário.

Quanto maior a distância até a carga mais afastadas entre si estão as linhas, em conformidade com o que já foi visto, o valor do

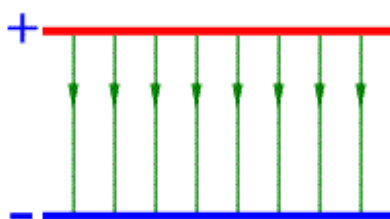


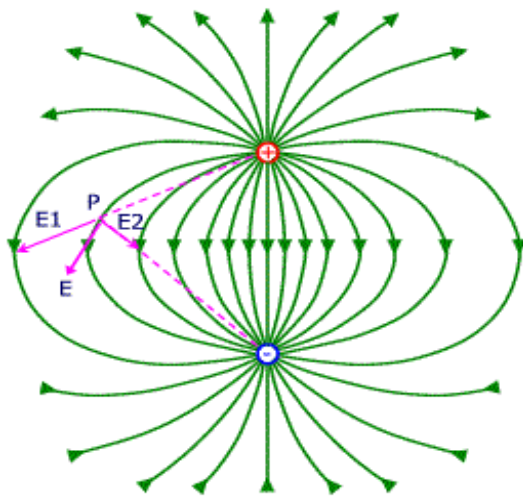
Figura 16

Campo uniforme

Pode-se demonstrar que o campo entre duas placas planas, paralelas e de espessura desprezível é uniforme.

Na parte inferior da sua representação: linhas de força retas e paralelas e igualmente espaçadas.

Linhas de força para duas cargas



Duas cargas pontiformes positivas e de idênticos valores

Duas cargas pontiformes de idênticos valores mas de sinais opostos

Figura 17

Note a indicação do vetor do campo elétrico para uma carga positiva no ponto P: E é igual à soma vetorial de E1 (campo da carga positiva) com E2 (campo da carga negativa).

3.6 Intensidade de Campo Elétrico

Se considerarmos uma carga fixa e uma outra se movendo lentamente em torno dela, observaremos o surgimento de um campo de força envolvendo a carga móvel. Seja esta carga Q_i . A força sobre ela é dada pela lei de Coulomb, na forma:

$$\frac{\vec{F}}{Q_i} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1i}^2} \hat{a}_{1i},$$

na qual Q_1 refere-se à carga fixa, \vec{F} é o vetor força e \hat{a}_{1i} é o versor da linha imaginária que une as duas cargas. O subscrito 1i refere-se à direção do seguimento de reta unindo as duas cargas. Esta forma de escrever a Lei de Coulomb permite definir a intensidade de campo elétrico, dada pela expressão da direita na equação anterior. A intensidade de campo elétrico deve ser medida em unidades de Newton por Coulomb, ou seja, força por unidade de carga (consistente com a expressão acima). Matematicamente:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_i} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1i}^2} \hat{a}_{1i}$$

Esta é a expressão da intensidade do campo elétrico devido a uma só carga pontual no vácuo (Q_1). O índice pode ser dispensado e a fórmula pode ser escrita em termos de Q.

3.7 Densidade de Fluxo Elétrico

O conceito de densidade de fluxo elétrico se deve a Faraday. Ele montou um experimento com esferas carregadas. Ele descobriu que a carga total na esfera externa de seu experimento era igual, em magnitude, à carga original da esfera interna e que isto era válido independente do material dielétrico que ele usara para separar ambas as

esferas. Faraday concluiu que da esfera interna para a externa havia um certo tipo de deslocamento, independente do meio. Ele descobriu o fluxo elétrico (fluxo de deslocamento ou simplesmente deslocamento). Faraday mostrou também que uma carga positiva maior na esfera interna induzia uma carga negativa correspondente na esfera externa. A densidade de campo elétrico, medida em coulombs por metro quadrado é dada por

$$\vec{D}|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \hat{a}_r, \quad \vec{D}|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi a^2} \hat{a}_r \quad \text{para } a \leq r \leq b$$

para as esferas interna e externa, respectivamente. Nestas expressões r refere-se à distância radial a partir do centro das esferas. Se fizermos a esfera interna tender a zero mas mantendo a mesma carga Q podemos reescrever a expressão na forma geral:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r$$

No vácuo pode ser mostrado que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

3.8 Energia e Potencial de uma Carga Pontual em Movimento num Campo Elétrico

Para mover uma carga contra um campo elétrico, é necessário exercer uma força igual e de sentido contrário àquela exercida pelo campo. Isto requer trabalho (dispêndio de energia). Caso se queira mover a carga na mesma direção do campo, tem-se então que o dispêndio de energia torna-se negativo. O campo realiza o trabalho.

Suponhamos que se queira deslocar uma carga Q de uma distancia dL , em um campo elétrico E . A força sobre Q devido ao campo é dada por: $\vec{F}_E = Q\vec{E}$

A componente da força na direção do deslocamento dL é dada por: $F_{EL} = \vec{F} \cdot \hat{a}_L = Q\vec{E} \cdot \hat{a}_L$

Portanto a força que deve ser aplicada deve ser da mesma magnitude mas de sinal contrário: $F_{apl} = -Q\vec{E} \cdot \hat{a}_{EL}$

O diferencial de trabalho ou energia é então dado por: $dW = -Q\vec{E} \cdot d\vec{L}$

O trabalho necessário para deslocar a carga de uma distância finita é determinado pela integral: $W = -Q \int_{inic}^{final} \vec{E} \cdot d\vec{L}$ Esta integral definida é a base da teoria dos campos.

3.9 Diferença de Potencial

A partir do conceito de trabalho pode-se definir a diferença de potencial, V , como o trabalho realizado por uma força externa ao deslocar uma unidade de carga positiva de um ponto a outro em um campo elétrico. A diferença de potencial pode ser escrita como:

$$V = - \int_{inic}^{final} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

Convenciona-se definir a diferença de potencial entre dois pontos, A e B , como V_{AB} como o trabalho realizado ao se deslocar uma unidade de carga de B até A . Com esta notação B é a posição inicial e A a posição final, de tal forma que a integral pode ser escrita assim

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

V_{AB} será positiva se o trabalho for realizado para deslocar uma carga positiva de B até A .

A diferença de potencial elétrico entre dois pontos A e B situados em um campo elétrico uniforme, isto é, $V_A - V_B = E X$. Onde E é a intensidade do campo e X a distância entre A e B na direção do campo.

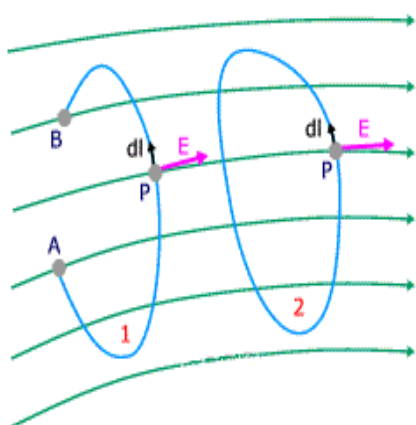


Figura 18

A igualdade anterior vale apenas para campo uniforme, mas se pode demonstrar (isso aqui não é feito) e a analogia permite concluir que, para um campo genérico, a diferença de potencial é dada pela integração do produto vetorial dos vetores campo elétrico e deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória considerada entre os dois pontos (ver ponto P genérico na figura)

Assim, para a trajetória aberta 1, temos:

$$V_A - V_B = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

para um caminho fechado 2 da figura, os pontos A e B coincidem, Portanto:

$$0 = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

3.10 Interação magnética e campo magnético

O fato de dois ímãs se atraírem ou se repelirem, dependendo das suas posições, pode sugerir a existência de "cargas magnéticas" similares às elétricas. Entretanto, tal modelo não deve ser considerado.

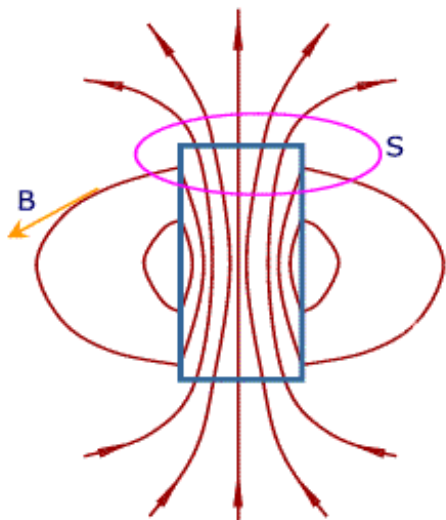
Cargas elétricas podem existir de forma isolada, mas não é possível separar espécies de magnetismo. Se um ímã for dividido em duas ou mais partes, estas serão simplesmente outros ímãs com as mesmas características de atração e repulsão do original. No modelo aceito, não existem cargas, mas sim dipolos magnéticos. Aos pólos são dados os nomes de norte e sul. E a interação entre os mesmos é a face mais visível do magnetismo: pólos idênticos se repelem e pólos opostos se atraem.

O conceito de campo magnético é similar ao do elétrico. O vetor do campo magnético B é chamado de indução magnética e as linhas que representam o campo são ditas linhas de indução. E as propriedades são as mesmas:

1) Uma tangente à linha de indução em um determinado ponto indica a direção do vetor B nesse ponto.

2) O número de linhas por unidade de área é proporcional ao módulo do vetor B . Isso significa que as linhas são mais próximas entre si onde B é maior e mais afastadas onde B é menor.

A Figura abaixo dá uma indicação aproximada das linhas de indução em um ímã de formato cilíndrico.



O **fluxo de campo magnético** é dado de forma similar ao elétrico: $\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

agnetismo tem uma formulação diferente da

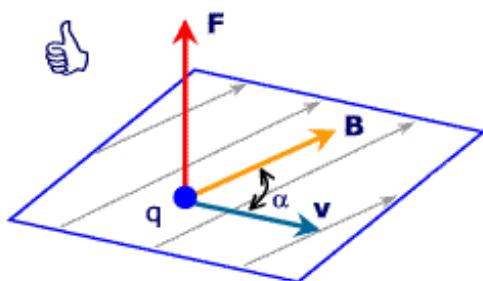
nde q é a carga elétrica no interior da mesma.

ados, para uma **superfície fechada** como S da

le é válida se S for uma superfície fechada.

magnético \mathbf{B} também sofre a influência da não existência de pólos isolados. Desde que um campo magnético pode exercer uma força sobre uma carga elétrica, ele é definido pelo modo de interação de ambos.

Seja, conforme figura abaixo, uma carga elétrica q que se move com velocidade \mathbf{v} e sobre a qual age uma força \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{v} . Então, a **indução magnética** no ponto da carga é o vetor \mathbf{B} que satisfaz à relação:



Notar que, se \mathbf{v} for nulo, \mathbf{F} também será e isto significa que a interação eletromagnética só ocorre com cargas em movimento.

Se existe também um campo elétrico, podemos considerar a soma vetorial da força que ele exerce sobre a carga, resultando numa formulação mais genérica:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Figura 20

Esta é a chamada **relação de Lorentz**.

A unidade de \mathbf{B} é $\text{N s C}^{-1} \text{m}^{-1}$, que no Sistema Internacional é chamada **tesla (T)**. Uma unidade antiga, mas ainda possivelmente usada, é o **gauss (G)** que equivale a 10^{-4} T.

O fluxo magnético tem como unidade SI o **weber (Wb)**.

E o tesla pode ser também expresso em **weber por metro quadrado (Wb/m²)**. Isso pode ser deduzido pela relação dimensional conforme igualdade I.1: weber = tesla x área

3.11 Campo magnético produzido por uma corrente elétrica

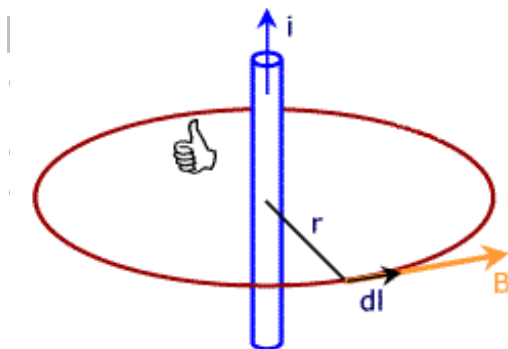
Podemos supor pelo que já foi visto que uma corrente elétrica produz um campo magnético em torno do condutor. O inverso também pode ocorrer, isto é, um campo magnético *pode* produzir uma corrente elétrica em um condutor. Estes são os fenômenos mais importantes do eletromagnetismo. Sem eles, a energia elétrica teria muito pouca utilidade prática.

O campo magnético produzido pela corrente elétrica em um fio retilíneo depende basicamente de dois fatores: da intensidade da corrente e da distância ao fio. Quanto maior for o valor da corrente, maior será o campo magnético criado por ela. Por outro lado, quanto maior for a distância ao fio, menor será o valor do campo magnético. As linhas do campo magnético são circulares, centradas no fio. O sentido das linhas de campo magnético pode ser obtido pela *regra da mão direita*: segure o condutor com a sua mão direita, de maneira que o dedo polegar aponte o sentido da corrente. Os seus dedos apontarão no sentido das linhas de campo

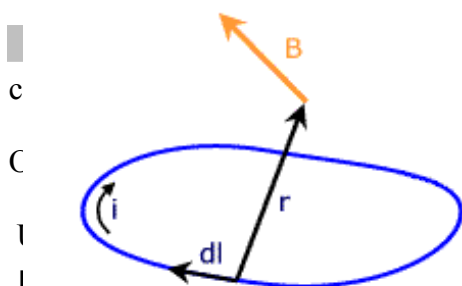
A lei de Ampère para o eletromagnetismo diz que, de forma genérica, a relação entre o campo magnético produzido e a corrente no condutor é dada por:

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 i \quad \text{Onde:}$$

\mathbf{B} é o vetor campo magnético, $d\mathbf{l}$ é vetor de comprimento infinitesimal ao longo da linha de indução e μ_0 é a **constante de permeabilidade magnética** que, para o vácuo, é igual a $4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb} / (\text{A m})$.



No caso de um condutor retilíneo de seção circular uniforme, a simetria leva à escolha de um caminho de integração circular concêntrico ao condutor e alinhado ao longo de uma



O resultado está conforme esperado: o campo aumenta com a corrente e diminui com a distância

direita conforme exibida na figura

onde **Lei de Biot-Savart** é dada por:

Neste caso, a integração é feita ao longo da espira condutora e o resultado é o vetor campo magnético em um determinado ponto.

Esta fórmula é mais adequada quando o formato do condutor não permite uma dedução simples como o cilíndrico anterior.

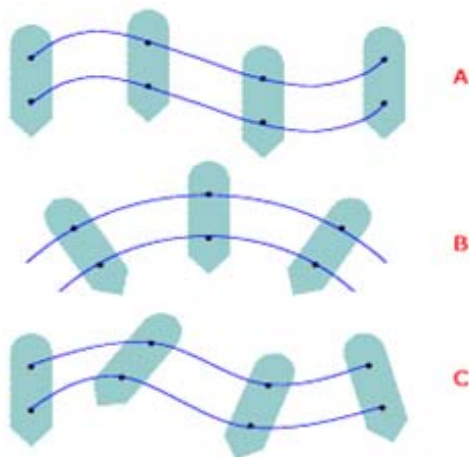
3.12 Campo magnético terrestre

O campo magnético terrestre é uma das variáveis que afetam a orientação dos satélites artificiais em relação ao seu centro de massa, ou seja, afetam a altitude dos satélites principalmente quando se encontram em baixas altitudes terrestres (até 1000km). Assim, esse campo interage com o momento magnético do satélite, o que dá origem a torques que influenciam o movimento de atitude. Além disso, o campo geomagnético é utilizado com frequência como referência para observar a atitude através de sensores magnéticos que indicam a direção do campo no satélite. Portanto, para modelagem e simulações, tanto do movimento dinâmico da atitude quanto das medidas de sensores magnéticos, são necessárias as componentes do campo magnético em função da posição do satélite, calculadas com rapidez e precisão preestabelecidas.

CAPITULO 4 – MECÂNICA – CONCEITOS FUNDAMENTAIS

4.1 Corpo Rígido

Pode ser definido como um corpo em que todos os pontos materiais conservam as distâncias entre si, mesmo sob aplicação de um esforço externo. Os sólidos reais sempre se deformam sob aplicação de uma carga, mas em muitos casos ela é tão pequena que pode ser desprezada.



Um corpo rígido pode ter um movimento de **translação**, quando todos os pontos percorrem trajetórias paralelas, como em A da Figura. Ou pode ter um movimento de **rotação**, quando os pontos percorrem trajetórias circulares, como em B da Figura.

O caso mais genérico do movimento de um corpo rígido é exemplificado em C da Figura, ou seja, uma combinação de translação e rotação.

Figura 23

4.2 Momento linear

É a grandeza vetorial, também chamada **quantidade de movimento**, dada pelo produto da massa de um corpo por sua velocidade: Momento linear $\mathbf{b} = m \mathbf{v}$.

O conceito de momento linear se encaixa de forma bastante clara na prática. Exemplo: um veículo carregado é mais difícil de ser parado que o mesmo veículo vazio porque a quantidade de movimento do primeiro é maior. E a 1ª Lei de Newton pode reescrita:

"O momento linear de um corpo livre é constante".

Quando não se trata de uma, mas de um conjunto ou sistema de partículas que só interagem entre si, ou seja, um **sistema isolado**, o **momento linear total é constante**. Assim, para n partículas: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n = \text{constante}$.

É chamada de **lei da conservação do momento**.

Notar que isso não significa que o momento de cada é invariável. Apenas a soma é. Assim, se o momento de uma diminui, o de outra ou de outras terão de aumentar para compensar a variação.

Exemplo: uma arma, ao ser disparada, produz um retrocesso. Antes do disparo, os momentos da arma e do projétil eram nulos e, portanto, o momento total também. Após o disparo, o projétil adquiriu um momento não nulo. E o corpo da arma deverá adquirir um momento não nulo e oposto ao do projétil para manter o total zero.

4.3 Momento angular

Seja uma partícula de massa m que se desloca em um plano P , segundo uma trajetória genérica A e com velocidade \mathbf{v} .

O **momento angular** dessa partícula em relação a um ponto O neste plano é dado por: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{b}$, onde \mathbf{b} é o momento linear da partícula.

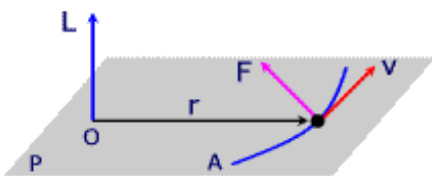


Figura 24

Desde que, conforme definição de momento linear, $\mathbf{b} = m \mathbf{v}$, temos: $\mathbf{L} = m (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$.

Lembrando a definição de produto vetorial, podemos concluir que \mathbf{L} é um vetor que passa pelo ponto O e é perpendicular ao plano P .

No caso de movimento circular, os vetores \mathbf{v} e \mathbf{r} são perpendiculares entre si e, portanto, o módulo de \mathbf{L} é dado por: $L = m r v = m r^2 \omega$.

Voltando à definição $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{b}$, fazemos a diferenciação em relação ao tempo $d\mathbf{L}/dt = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{b} + \mathbf{r} \times d\mathbf{b}/dt$. A parcela $d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{b}$ é nula pois $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ e os vetores \mathbf{v} e \mathbf{b} têm sempre a mesma direção. Assim: $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times d\mathbf{b}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

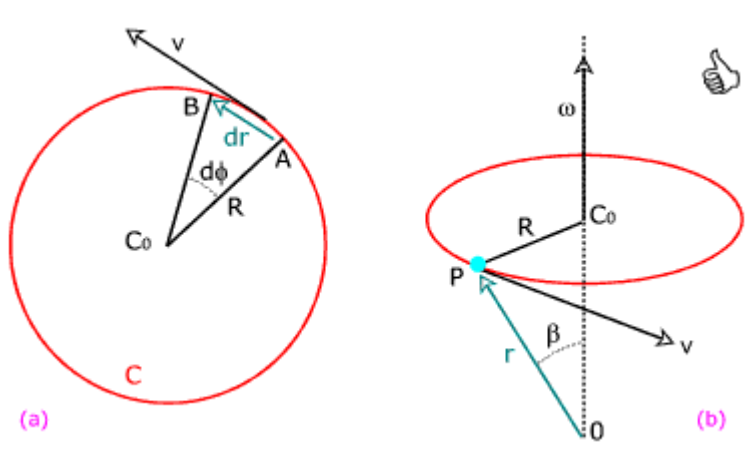
Mas esse produto vetorial ($\mathbf{r} \times \mathbf{F}$) é o torque ($\boldsymbol{\tau}$) da força \mathbf{F} em relação ao ponto O.
 $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$.

Portanto, a variação do momento angular em relação ao tempo é igual ao torque da força atuante na partícula.

4.4 Velocidade angular

Em (a) da Figura 25 temos um movimento ao longo da circunferência C. Os pontos A e B correspondem a um arco infinitesimal de ângulo $d\phi$. Pela definição de ângulo, esse arco é igual a $R d\phi$. Considerando agora a definição de velocidade, em termos escalares temos $v = d(R d\phi) / dt$. Mas, para a circunferência, R é constante. Assim, $v = R d\phi / dt$.

O termo $\omega = d\phi / dt$ é denominado velocidade angular correspondente ao movimento circular. Ela indica a variação do deslocamento angular em relação ao tempo.



Podemos então escrever

$$v = \omega R.$$

No aspecto vetorial, supomos uma situação genérica como em (b) da mesma figura. O vetor \mathbf{r} de posição é dado em relação a uma origem qualquer 0 na

Figura 25 vertical que passa pelo centro do círculo.

Então o raio R é dado por: $R = r \sin \beta$. E, substituindo na anterior, temos:

$v = \omega r \sin \beta$. Essa igualdade sugere um produto vetorial. Portanto, podemos definir velocidade angular como um vetor $\boldsymbol{\omega}$ tal que: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Pelo produto vetorial, concluímos que o vetor $\boldsymbol{\omega}$ deve ser perpendicular ao círculo. E a simetria da questão indica que ele deve passar pelo centro. Naturalmente, a definição só é válida para movimento circular, r e β constantes conforme (b) da figura.

A unidade básica de velocidade angular no Sistema Internacional (SI) é o **radiano por segundo (rad/s)**. Na prática, é disseminado o uso de **rotação por minuto (rpm)**, equivalente a $(2 \pi / 60)$ ou $(\pi / 30)$ rad/s.

4.5 Momento de inércia

Na Figura abaixo temos um corpo rígido que gira em torno de um eixo vertical y com velocidade angular ω . O momento angular, conforme visto anteriormente, de uma porção elementar de massa dm é dado por

$$d\mathbf{L} = dm \mathbf{R} \times \mathbf{v}, \text{ onde } \mathbf{v} \text{ é a velocidade tangencial.}$$

O módulo de \mathbf{R} é $r/\sin \alpha$ e o de \mathbf{v} é ωr . Desde que $d\mathbf{L}$ e \mathbf{R} são ortogonais, o módulo de $d\mathbf{L}$ é dado por

$$dL = dm r \omega r / \sin \alpha = dm r^2 \omega / \sin \alpha. \text{ E o componente } dL_y \text{ é dado por}$$

$$dL_y = dL \cos(90 - \alpha) = dL \sin \alpha. \text{ E o módulo } dL_y = dL \sin \alpha = (dm r^2 \omega / \sin \alpha) \sin \alpha.$$

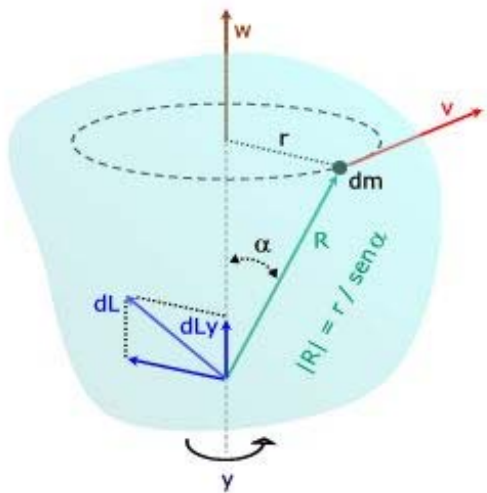


Figura 26

$$\text{Ou } dL_y = dm r^2 \omega.$$

Fazendo a integração para a massa total do corpo,

$$L_y = \left(\int r^2 dm \right) \omega.$$

E o fator $\int r^2 dm$ é denominado **momento de inércia de massa** do corpo em relação ao eixo y . É uma grandeza importante no estudo da rotação de corpos rígidos. Muitas vezes simbolizada pela letra I . Assim,

$$L_y = I_y \omega.$$

Notar que o momento de inércia depende da posição do eixo, da forma geométrica do corpo e da distribuição de massa (não só da massa total). Exemplo: dois corpos de mesmo material e mesma forma podem ter momentos diferentes em relação ao mesmo eixo se um for homogêneo e outro tiver massa mais concentrada em um local.

O outro componente de \mathbf{L} (L_x) não é aqui calculado, mas deve existir em princípio. Assim, em geral, o momento angular \mathbf{L} não é paralelo ao eixo de rotação. Entretanto, pode-se demonstrar que, para qualquer corpo, existem pelo menos 3 eixos perpendiculares entre si para os quais o momento angular é paralelo ao eixo. Eles são chamados **eixos principais de inércia**, designados por X_0 , Y_0 e Z_0 . E os respectivos momentos angulares são os **momentos principais de inércia**, I_{x0} , I_{y0} e I_{z0} .

Para um eixo principal, vale portanto a igualdade vetorial: $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$.

Se um corpo tem um eixo de simetria, ele é um eixo principal de inércia.

Exemplo: para uma esfera homogênea, qualquer eixo que passa pelo centro é um eixo principal de inércia.

Para rotação fora de um eixo principal, o momento angular é dado por:

$\mathbf{L} = I_{x0} \boldsymbol{\omega}_{x0} + I_{y0} \boldsymbol{\omega}_{y0} + I_{z0} \boldsymbol{\omega}_{z0}$. Onde $\boldsymbol{\omega}_{x0}$, $\boldsymbol{\omega}_{y0}$ e $\boldsymbol{\omega}_{z0}$ são as projeções do vetor velocidade angular nos eixos principais.

A unidade do momento de inércia de massa no Sistema Internacional é o kg m^2 . Existe conceito semelhante de momento de inércia aplicado a superfícies. Desde que superfícies não têm massa, a unidade elementar é uma área e o momento de inércia tem como unidade m^4 (na prática, é mais usado cm^4).

4.5 Movimento de um sólido

Para descrever o movimento de um sólido, vamos utilizar dois sistemas de coordenadas: um sistema “imóvel”, isto é, um sistema de coordenadas galileico XYZ , e um sistema móvel de coordenadas $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, que será suposto ligado rigidamente ao corpo sólido, e que participa de todos os movimentos deste. É conveniente localizar a origem do sistema móvel no centro de inércia do corpo.

A posição de um sólido em relação ao sistema imóvel fica completamente determinada quando damos a posição do sistema móvel. Seja \mathbf{R} o raio vetor que indica a posição da origem O do sistema móvel. A orientação dos eixos deste último, em relação ao sistema imóvel, será definida por três ângulos independentes, de tal modo que, com as três componentes do vetor \mathbf{R} , teremos ao todo, seis coordenadas. Desse modo, todo e qualquer corpo sólido se apresenta como um sistema mecânico de seis graus de liberdade.

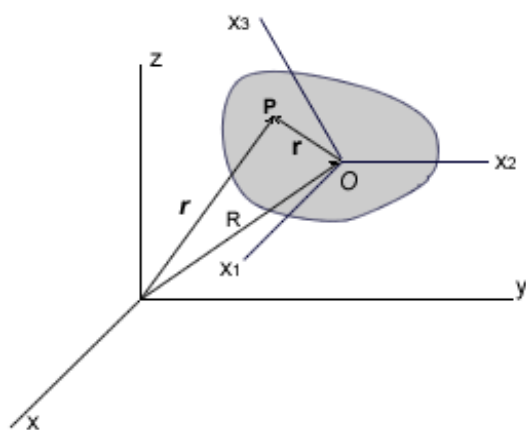


Figura 27

Consideremos um deslocamento arbitrário infinitamente pequeno do corpo. Esse deslocamento poderá ser descrito como uma soma de duas parcelas. Uma delas será uma translação infinitamente pequena do corpo, por meio da qual o centro de inércia do corpo passa da sua posição inicial a posição final, sem qualquer mudança de orientação dos eixos do sistema móvel. A outra será uma rotação infinitamente pequena em torno do centro de inércia, por meio da qual o sólido passa à sua posição final.

Designemos por \mathbf{r} o raio vetor de um ponto P qualquer do sólido no sistema de coordenadas móveis e por \mathbf{r} o raio vetor do mesmo ponto no sistema imóvel. Um deslocamento infinitamente pequeno $d\mathbf{r}$ do ponto P será então formado por um deslocamento $d\mathbf{R}$ do centro de inércia e de um deslocamento $d\phi \times \mathbf{r}$ deste último resultante de uma rotação infinitamente pequena $d\phi$.

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\phi \times \mathbf{r}.$$

Dividindo essa igualdade pelo tempo dt empregado para efetuar o deslocamento considerado, e introduzindo as velocidades,

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{dR}{dt} = V, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega, \quad \text{obteremos a relação: } \mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

O vetor \mathbf{V} é a velocidade do centro de inércia do sólido, ela também é chamada de velocidade do seu movimento de *translação*. O vetor $\boldsymbol{\Omega}$ é chamado de *velocidade angular* de rotação do corpo do sólido. A sua direção (da mesma forma que a de $d\varphi$) coincide com a do eixo de rotação. Desse modo, a velocidade \mathbf{v} dum ponto qualquer do corpo (em relação ao sistema imóvel) pode ser expressa em função da velocidade de translação do corpo e da velocidade da sua rotação.

Vale a pena salientar que as propriedades específicas decorrentes do fato de a origem das coordenadas estar situada no centro de inércia do corpo não foram utilizadas no estabelecimento da fórmula. A vantagem dessa escolha da posição da origem aparece no estudo da energia do corpo em movimento.

4.6 Forças em corpos rígidos – Torque

Na maioria dos casos práticos, os corpos não são (ou não podem ser considerados) simples pontos materiais. Na realidade, todos eles têm três dimensões, mas, por simplicidade, consideramos por enquanto apenas duas dimensões, isto é, as forças são coplanares.

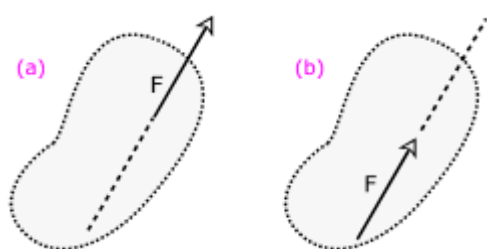


Figura 28

Isso tem fundamento prático porque, em vários casos, os esforços principais atuam no mesmo plano e os demais são desprezíveis.

A Figura 28 representa um princípio elementar, mas importante porque pode ser aplicado em qualquer caso.

A ação de uma força sobre um corpo independe da sua posição ao longo da sua **linha de ação**.

Portanto, os casos (a) e (b), indicados como exemplos na figura, são equivalentes.

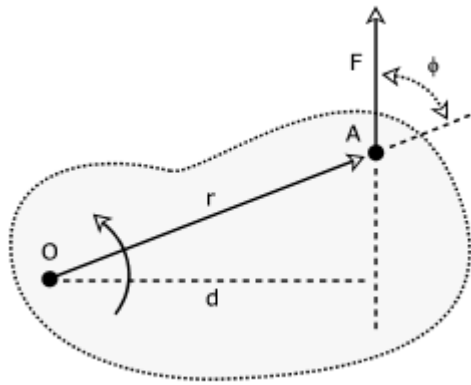


Figura 29

ação de F e o ponto O : $\tau = d F$.

Essa grandeza é denominada **torque** (ou **momento**) da força F em relação ao ponto O . E a unidade básica no Sistema Internacional é o Newton metro (N m).

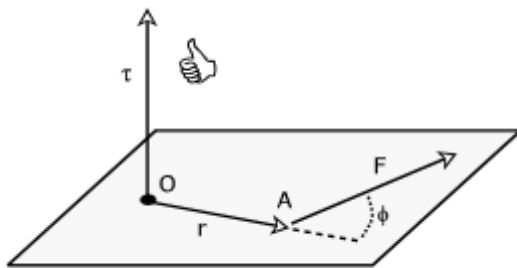


Figura 30

Ou seja, torque é um vetor igual ao produto vetorial do vetor de posição r do ponto de aplicação da força e o vetor da força (F).

Portanto, o vetor torque é perpendicular ao plano dos vetores r e F e o sentido pode ser visto pela regra da mão direita conforme Figura 2.3.

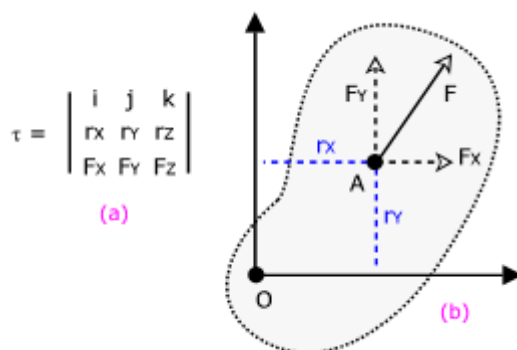


Figura 31

os componentes do vetor torque.

Se r e F estão no plano XY , $r_z = F_z = 0$. E, para o módulo de τ , a igualdade anterior fica $\tau = r_x F_y - r_y F_x$.

A ação de uma força sobre um corpo pode resultar em tendência à rotação em vez de translação: na Figura 29 o corpo pode girar em torno do ponto O . Uma força F , deslocada de O , produz um efeito de rotação.

É facilmente perceptível na prática que o efeito será tanto mais intenso quanto maior a intensidade da força F e/ou a distância de F ao ponto O .

Então, uma grandeza que pode relacionar o fato é dada pelo produto do módulo da força F pela distância d entre a linha de

Se tomamos a distância r do ponto O até o ponto A (aplicação da força), a igualdade anterior fica

$$\tau = r \sin \phi F.$$

Isto sugere um produto vetorial e, rigorosamente, o torque é assim definido:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

O produto vetorial anterior pode ser dado pelo determinante de (a) da Figura 31, onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários.

Expandindo de acordo com propriedades dos determinantes, temos:

$$\tau = \mathbf{i} (r_y F_z - r_z F_y) + \mathbf{j} (r_z F_x - r_x F_z) + \mathbf{k} (r_x F_y - r_y F_x).$$

Desde que \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários em cada eixo (X , Y e Z), a igualdade acima dá

Em (b) da mesma figura podemos ver a situação: o torque de uma força F em relação a um ponto O é igual à soma dos torques de cada componente da força em relação ao mesmo ponto. O sinal negativo ocorre porque as tendências de rotação são opostas.

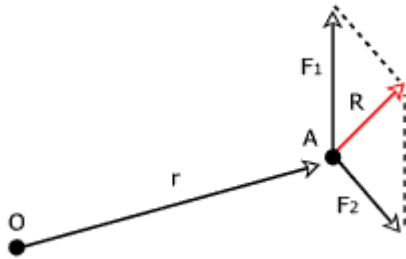


Figura 32

A Figura 32 dá exemplo de duas forças F_1 e F_2 , de resultante R e atuantes no mesmo ponto A .

Podemos usar a propriedade distributiva do produto vetorial

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \tau_1 + \tau_2$$

Para um número genérico de forças no mesmo ponto, podemos escrever $\tau = \sum \tau_i$.

4.6 Rotação do corpo rígido

A relação entre o momento angular e torque é $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$. E, da definição anterior de momento de inércia, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Substituindo, $I d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{T}$. O termo $d\boldsymbol{\omega}/dt$ é a variação da velocidade angular com o tempo, ou seja, a **aceleração angular**, que será designada por $\boldsymbol{\alpha}$. Assim, $\mathbf{T} = I\boldsymbol{\alpha}$. Notar a semelhança com a relação para o movimento de translação, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Notar também que, se o torque é nulo, a aceleração angular também é, pois o momento de inércia não é nulo num corpo real. Isso significa que a velocidade angular é constante.

Essas igualdades valem para rotação em torno de um eixo principal, que é a situação prática mais comum.

Translação

Momento linear $\mathbf{b} = m\mathbf{v}$

Força $\mathbf{F} = d\mathbf{b}/dt$

Força e aceleração $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Energia cinética $E_c = (1/2) m v^2$

Potência $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Rotação

Momento angular $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$

Torque $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$

Torque e aceleração angular $\mathbf{T} = I\boldsymbol{\alpha}$

Energia cinética $E_c = (1/2) I \omega^2$

Potência $P = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}$

A tabela acima faz uma comparação de grandeza para os dois movimentos. Algumas ainda não foram comentadas aqui (energia e potência), mas a analogia é evidente.

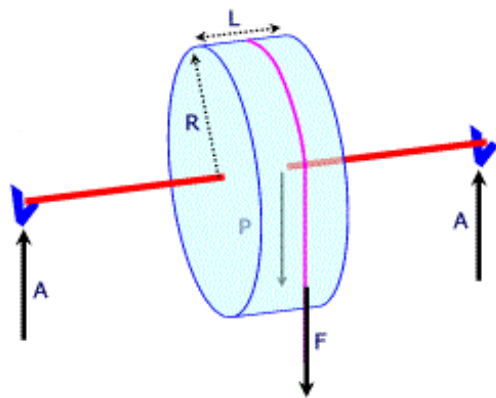


Figura 33

$$2A = P + F = \pi R^2 L \mu g + F.$$

$$\text{Ou a reação de cada apoio é } A = (\pi R^2 L \mu g + F) / 2.$$

Conforme tópico anterior, o raio de giração é dado por $K = \sqrt{I / M}$ ou $I = M K^2$. E, para o cilindro, $K = R / \sqrt{2}$. Assim, $I = M R^2 / 2 = \pi R^2 L \mu R^2 / 2 = \pi R^4 L \mu / 2$.

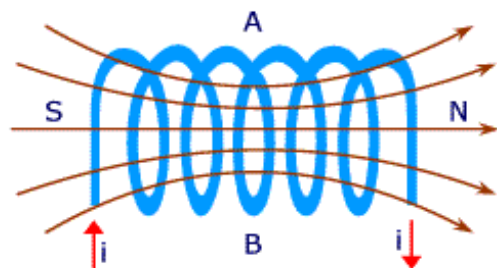
O torque aplicado no cilindro é o produto da força F pelo raio $T = F R$, que deve ser igual ao produto do momento de inércia pela aceleração angular, conforme igualdade anterior. Assim, $I \alpha = F R$ ou $\alpha = F R / I = F R / (\pi R^4 L \mu / 2) = 2 F R / (\pi R^4 L \mu)$. Portanto, o cilindro sofre uma aceleração angular dada por essa igualdade enquanto for aplicada a força F . E a velocidade angular t segundos após o repouso é $\omega = \alpha t$.

CAPITULO 5 – BOBINAS MAGNÉTICAS

5.1 Solenóides

Um solenóide é um condutor enrolado de forma helicoidal, com as espiras bastante próximas entre si. Uma corrente elétrica circula pelo mesmo e os campos magnéticos das espiras se somam e o conjunto atua como se fosse um dipolo único.

As possibilidades de se ter ou não o campo pelo simples ligar e desligar da corrente e de se ajustar o campo pela variação da corrente fazem do solenóide um dispositivo largamente usado.



Um **solenóide ideal** tem um comprimento grande em relação ao diâmetro e as espiras são muito próximas entre si, de forma que as laterais (A e B da Figura) são lados.

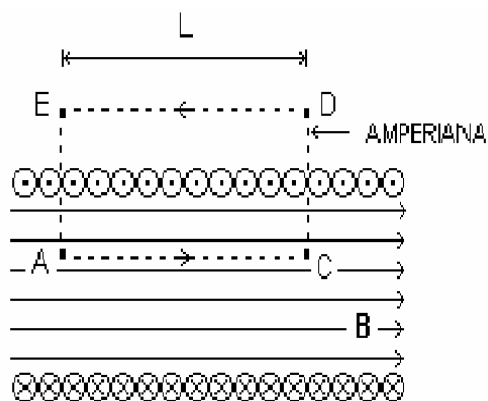
campo é quase uniforme e essa zona de is ele se aproximar do ideal.

A Figura abaixo representa o corte longitudinal de um solenóide que se considera ideal. O que se deseja é uma maneira simples de cálculo do campo na região uniforme.

No trajeto fechado 1-2-3-4, o primeiro membro da Lei de Ampère pode ser dividido em: $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{1,2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{2,3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{3,4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{4,1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = W + X + Y + Z$

(associando cada letra a uma parcela desta soma).

E temos: $W = B d$



$X = Z = 0$ (pois os vetores $d\mathbf{l}$ são ortogonais a \mathbf{B}).

$Y = 0$ pois não há indução externa.

Portanto, $B d = \mu_0 i_t$. Notar que i_t não é a corrente aplicada no solenóide conforme figura anterior, pois deve ser a corrente total dentro do trajeto 1-2-3-4. Se n é o número de espiras por unidade de comprimento, $i_t = n d i$. E $B d = \mu_0 i d n$. Assim:
 $B = \mu_0 i n$

Figura 35

No caso de solenóides reais, esta fórmula dá uma razoável aproximação para a região central.

5.2 Cálculo do torque da bobina

O torque da bobina devido a interação do campo magnético terrestre com o momento magnético das bobinas é dado pelo produto vetorial $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$, cujas componentes são.

$$T_x = m_y B_z - m_z B_y$$

$$T_y = m_z B_x - m_x B_z$$

$$T_z = m_x B_y - m_y B_x$$

Onde \mathbf{m} é o vetor momento magnético da bobina e \mathbf{B} é o vetor campo magnético terrestre.

O vetor campo magnético \mathbf{b} gerado pelas bobinas tem a mesma direção e sentido do momento magnético \mathbf{m} . Por analogia com as equações acima concluímos que, conhecido o campo magnético terrestre nas direções x , y e z , representado por suas componentes B_x , B_y e B_z , temos que a direção do campo magnético gerado pelas bobinas deve ser como mostrado na tabela a seguir.

Campo magnético terrestre	Direção do Sol	Bobinas	Direção correta do campo das bobinas
B_x	-	y	$-b_y$
B_y	-	x	b_x
B_y	$S_x > 0, S_y > 0$	z	$-b_z$
B_x	$S_x > 0, S_y > 0$	z	b_z

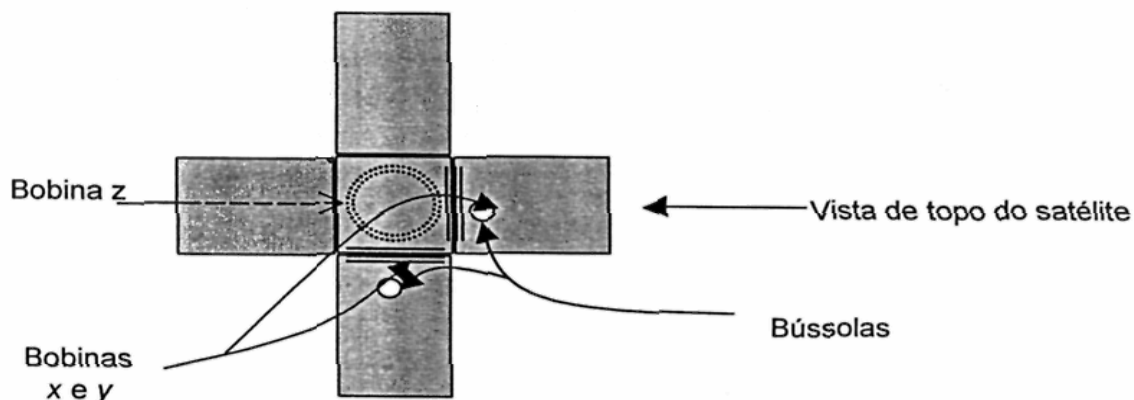


Figura 36

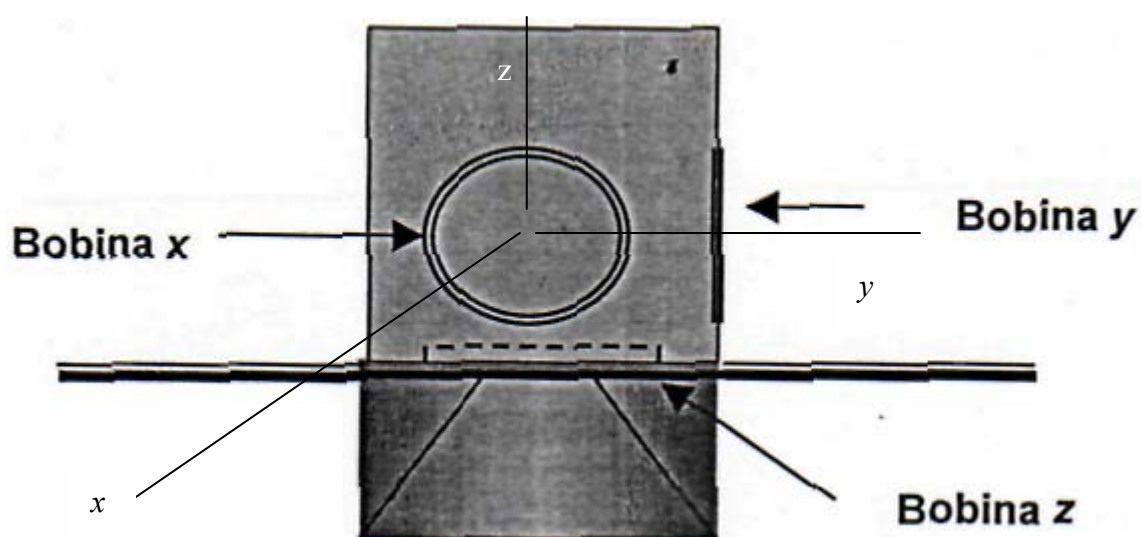


Figura 37

CONCLUSÃO

Neste trabalho parcial de pesquisa feito um levantamento bibliográfico para se estudar e contextualizar as aplicações de bobinas magnéticas no âmbito da mecânica orbital. Foram estudados os fundamentos da mecânica vetorial, os conceitos fundamentais do eletromagnetismo e do movimento rotacional, tendo em vista a construção de um background específico para o desenvolvimento do modelo matemático do movimento rotacional de um satélite controlado ativamente por bobinas magnéticas. Na seqüência desse projeto pretende-se apresentar o modelo matemático de um satélite com controle geomagnético e fazer um estudo de caso, com a simulação computacional da dinâmica e controle do satélite de coleta de dados brasileiro, o SCD2.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Mariano. W.C.; Eletromagnetismo, Fundamentos e Aplicações , ERICA, 2003
2. Halliday, David; Fundamentos de Física 3 – Eletromagnetismo, LTC, 2003
3. Hwei P. Hsu; Análise Vetorial, Coleção Técnica, 1972
4. L. Landau e E. Lifchitz, Curso de Física – Mecânica, HEMUS,
5. Carrara, V.; Varotto, S. E.; Projeto de bobinas magnéticas para uso em satélites, INPE-5665-ntc-319,1995
6. Carrara, V. Varotto, S.E.; Ricci, M.C.; Um experimento de teste da bobina de rotação do SCD2, INPE-5404-RPQ/65b
7. Ferreira, L.D. D., da Cruz, J. J. e Carrara, V.Reorientação do eixo de rotação do satélite SCD2 e estudos de viabilidade, INPE A624/506079